Conjunto de problemas 1.4

En los problemas del 1 al 14 evalúe cada límite.

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{x+1}$

2. $\lim_{\theta\to \pi/2} \theta \cos \theta$

3. $\lim_{t\to 0} \frac{\cos^2 t}{1+\operatorname{sen} t}$

4. $\lim_{x\to 0} \frac{3x \tan x}{\operatorname{sen} x}$

5. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{2x}$

6. $\lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{sen} 3\theta}{2\theta}$

7. $\lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{sen} 3\theta}{\tan \theta}$

8. $\lim_{\theta\to 0} \frac{\tan 5\theta}{\operatorname{sen} 2\theta}$

9. $\lim_{\theta\to 0} \frac{\cot (\pi\theta) \operatorname{sen} \theta}{2 \sec \theta}$

10. $\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 3t}{2t}$

11. $\lim_{t\to 0} \frac{\tan^2 3t}{2t}$

12. $\lim_{t\to 0} \frac{\tan 2t}{\operatorname{sen} 2t - 1}$

13. $\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} 3t + 4t}{t \sec t}$

14. $\lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{\theta^2}$

En los problemas del 15 al 19 trace las funciones u(x), l(x) y f(x). Después utilice estas gráficas junto con el teorema del emparedado para determinar $\lim_{x\to 0} f(x)$.

15. $u(x) = |x|, l(x) = -|x|, f(x) = x \operatorname{sen}(1/x)$

16. $u(x) = |x|, l(x) = -|x|, f(x) = x \operatorname{sen}(1/x^2)$

17. $u(x) = |x|, l(x) = -|x|, f(x) = (1 - \cos^2 x)/x$

18. $u(x) = 1, l(x) = 1 - x^2, f(x) = \cos^2 x$

19. $u(x) = 2, l(x) = 2 - x^2, f(x) = 1 + \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

20. Demuestre que $\lim_{t\to c} \cos t = \cos c$ utilizando un argumento similar al que se empleó en la demostración de que $\lim_{t\to c} \operatorname{sen} t = \operatorname{sen} c$.

21. Demuestre las afirmaciones 3 y 4 del teorema A mediante el teorema 1.3A.

22. Demuestre las afirmaciones 5 y 6 del teorema 1.3A.

23. Con base en área$(OBP) \le$ área(sector OAP) $\le$ área(OBP) + área$(ABPQ)$ en la figura 4, demuestre que

$$\cos t \le \frac{t}{\operatorname{sen} t} \le 2 - \cos t$$

y así obtenga otra demostración de que $\lim_{t\to 0^+} (\operatorname{sen} t)/t = 1$.

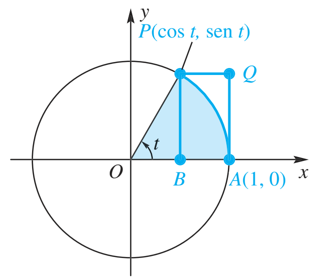

Figura 4

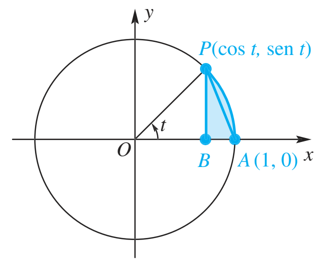

Figura 5

24. En la figura 5, sea D el área del triángulo ABP y E el área de la región sombreada.

(a) Haga una conjetura acerca del valor de $\lim_{t\to 0^+} \frac{D}{E}$ observando la figura.

(b) Encuentre una fórmula para D/E en términos de t.

C (c) Utilice una calculadora para obtener una estimación precisa de $\lim_{t\to 0^+} \frac{D}{E}$.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** 0 **2.** 1 **3.** el denominador es cero cuando $t = 0$ **4.** 1

1.5 Límites al infinito; límites infinitos

Con frecuencia, los problemas y paradojas más profundos de las matemáticas están entrelazados con el uso del concepto de infinito. Incluso, el progreso matemático, en parte, puede medirse en términos de la comprensión del concepto de infinito. Ya hemos utilizado los símbolos ∞ y $-\infty$ en nuestra notación para ciertos intervalos. Así, $(3, \infty)$ es nuestra forma para denotar al conjunto de todos los números reales mayores que 3. Observe que nunca nos hemos referido a ∞ como un número. Por ejemplo, nunca lo hemos sumado ni dividido entre algún número. Utilizaremos los símbolos ∞ y $-\infty$ de una manera nueva en esta sección, pero éstos aún no representan números.

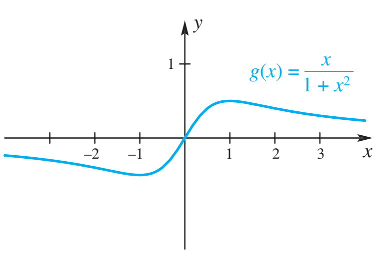

Figura 1

Límites al infinito Considere la función $g(x) = x/(1 + x^2)$ cuya gráfica se muestra en la figura 1. Hacemos esta pregunta: ¿qué le sucede a $g(x)$ cuando x se hace cada vez más grande? En símbolos, preguntamos por el valor de $\lim_{x\to\infty} g(x)$.

Cuando escribimos $x \to \infty$, *no* queremos dar a entender que en un lugar muy, muy alejado a la derecha del eje x exista un número —más grande que todos los demás— al cual se aproxima x. En lugar de eso utilizamos $x \to \infty$ como una forma breve de decir que x se hace cada vez más grande sin cota.

En la tabla de la figura 2 hemos listado valores de $g(x) = x/(1 + x^2)$ para diversos valores de x. Parece que $g(x)$ se hace cada vez más pequeño conforme x se hace cada vez más grande. Escribimos